# הגדרנו

# הגדרה

יהי תת מרחב. קבוצה נקראת קבוצה פורשת(או יוצרת) של W אם

## הערות

1. אם => (אבל לא גורר
2. אם תת מרחב =>
3. אם => (אבל זה לא גורר או
4. הוא תת מרחב המינימלי שמכיל את S. כלומר אם תת מרחב כך ש =>

תלות לינארית

# הגדרה

ווקטורים נקראים תלויים לינארית אם קיימים , לא כולם אפסיים, כך ש. אם סקלים כאלה לא קיימים אזי נקראים בלתי תלויים לינארית.

## דוגמאות

1. ת"ל:
2. , בת"ל
3. פתרונות פונדמנטלים של מ. הומוגנית הם בלתי תלויים לינארית.
4. שורות שונות מ0 של מטריצה מדורגת הן בת"ל.
5. אם למערכת הומוגנית יש רק פתרון טריוויאלי(=פתרון האפס) אזי העמודות של מטריצה מצומצמת הן בלתי תלויות לינארית. וגם להפך!  
   ל (כאשר עמודה) העמודות בלתי תלויות לינארית ⬄ קיים רק פתרון האפס. העמודות תלויות לינארית ⬄ קיים פתרון לא טריוויאלי.

# משפט

אם קבוצה ת"ל אזי קיים ווקטור שהוא צירוף לינארי של אחרים(מS)

## הוכחה

S ת"ל: קיימים לא כולם = 0 כך ש. נניח => =>

# משפט

יהיו קבוצה ו כך ש הוא צ"ל של ווקטורים אחרים מS, אז

# הוכחה

אבל => =>

## הערה

אם ווקטור שהוא צ"ל של ווקטורים אחרים מS אזיS ת"ל

# משפט

אם קבוצה() של ווקטורים לא כולם אפסיים אזי קיימת תת קבוצה בת"ל שמקיימת

## הערות

1. לא בהכרח יחידה: ת"ל, . שלושת הקבוצות , , בת"ל
2. קבוצה היא מינימלית: לא קיימת תת קבוצה כך ש

## הוכחה

יהי ת"ל => קיים כך ש  
נתבונן ב. אם בת"ל אזי . אם ת"ל אזי קיים כך ש ונמשיך().  
בסוף נקבל קבוצה ריקה. לפי ההנחה כי לא כל הווקטורים הם אפסיים.

## הערה

ת"ל אם ורק אם : אם אזי . מכיוון שיש רק a אחד הוא חייב להיות שונה מאפס, לכן אם אזי

בסיס ומימד

# הגדרה

יהי V מרחב ווקטורי מעל . תת קבוצה נקראת בסיס של V(מעל ) אם

1. S קבוצה פורשת()
2. S בת"ל

# הגדרה

מרחב V נקרא נוצר סופי אם קיימת קבוצה פורשת סופית

## דוגמאות

1. נוצר סופי:
2. מרחב הפולינומים אינו מרחב סופי: קבוצה פורשת אינסופית

# משפט 1

לכל מרחב ווקטורי קיים בסיס.

נוכיח את המשפט רק למרחבים ווקטורים נוצרים סופי

# משפט 2

יהי V מ"ו נוצר סופי, אזי בכל בסיס של V יש אותו מספר של ווקטורים. המספר הזה נקרא מימד של V(מעל ). סימון:

## הערה

הערה: בסיס של מרחב האפס הוא =>

# הוכחה למשפט 1

הוכחנו את המשפט למרחבים8 ווקטורים נוצרים סופי: V נוצר סופי, נניח ש => קיימת קבוצה סופית כך ש.( ויש בה ווקטור כי ) => קיימת תת קבוצה בת"ל ו => קיים בסיס.